
RELATIVIDADE RESTRITA COM O AUXÍLIO DE DIAGRAMAS⁺*

Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos
Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
Caxias do Sul – RS

Resumo

Apresentamos neste trabalho alguns diagramas que podem ser úteis como recursos auxiliares para o professor quando for explicar alguns dos aspectos mais importantes da Teoria da Relatividade Restrita para alunos de ensino médio ou mesmo de primeiro ano de cursos de graduação. Tais diagramas podem ser usados para construir instrumentos simples para demonstrar efeitos como a dilatação do tempo ou a contração espacial. Propomos uma construção com um “pêndulo equivalente” para demonstrar a diferença no avanço do tempo entre dois sistemas de referência: o primeiro em repouso em relação ao observador e o segundo em movimento em relação ao mesmo observador.

Palavras-chave: *Relatividade Restrita, Transformações de Lorentz.*

Abstract

We present some diagrams which can be useful to help the teacher when it is necessary to explain some of the most important aspects of Special Relativity for High School students, or first year undergraduate students. These diagrams can be used to construct

⁺ Special Relativity using diagrams

^{*} *Recebido: agosto de 2005.
Aceito: abril de 2006.*

some simple instruments to demonstrate effects like time dilation and size contraction. We propose also a construction, with an “equivalent pendulum” in order to demonstrate the difference in time advance between two reference systems: the first in rest relatively to the observer and the second in movement relatively to the same observer.

Keywords: *Special Theory of Relativity, Lorentz Transformations.*

I. Introdução

Uma das grandes dificuldades encontradas pelos professores de Física do ensino médio em nosso país, diz respeito à explicação de fenômenos de Física Moderna em sala de aula. Este problema se apresenta usualmente quando surgem dúvidas entre os alunos a respeito de tópicos como por exemplo buracos negros, pulsares, planetas fora do sistema solar, lentes gravitacionais, etc., que eventualmente são abordados na mídia de grande circulação ou em revistas de divulgação científica. Entre os assuntos de maior interesse estão a relatividade restrita e a relatividade geral. Apesar disso, algumas vezes é difícil para o professor esclarecer alguns aspectos dessas teorias a esses alunos, devido ao fato de a teoria da relatividade abordar tópicos que não são intuitivos. Aliado a este problema, vem o fato que, em sua maioria, os alunos de nível médio ainda não desenvolveram a abstração necessária para entender a descrição matemática da maioria dos fenômenos físicos envolvidos. Devido a essas dificuldades, nota-se que é bastante interessante municiar os professores com o maior número de ferramentas possível, para manter, ou mesmo despertar, o interesse por tais assuntos entre os alunos da rede de ensino brasileira.

Tendo como objetivo contribuir para que o interesse seja mantido (ou despertado), apresentamos aqui três diagramas, dois deles já relativamente conhecidos, que podem auxiliar o professor na demonstração de certos fenômenos previstos pela Teoria da Relatividade Restrita. Outro fator que motivou este trabalho é a divulgação do uso de diagramas e de instrumentos simples para demonstrações (JAMES, 1992), além dos instrumentos que descreveremos adiante. É importante ressaltar que, embora tenham sido propostos já há bastante tempo e sejam boas ferramentas para uso em sala de aula, aparentemente esses diagramas não são conhecidos pela maioria dos professores atuantes em nosso país, talvez pelo fato de sua divulgação ser feita, quase que exclusivamente, em publicações de

língua estrangeira. O primeiro diagrama que apresentaremos pode ser utilizado como base para uma construção simples, que serve para demonstrar os efeitos de deformação espacial. O segundo serve para estudar o efeito da dilatação temporal e também de motivação para a construção do terceiro diagrama que mostraremos, que é um guia para a construção de pêndulos equivalentes, permitindo demonstrar de maneira visual a dilatação do tempo em um referencial em movimento.

II. Transformações de Lorentz

Um dos efeitos previstos pela Teoria da Relatividade Restrita (daqui em diante designada TRR) de Einstein (FEYNMAN, 1963) prevê, por meio das Transformações de Lorentz (TL), que um corpo extenso quando em movimento retilíneo uniforme terá seu comprimento, no sentido do movimento, reduzido de um fator que depende de sua velocidade naquela direção. Dessa maneira, utilizando as TL, temos:

$$L = L_0 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1)$$

em que L_0 é o comprimento do corpo quando medido por um observador em repouso em relação a ele, L é o comprimento do corpo medido pelo observador que se move com velocidade v em relação a ele e c é a velocidade da luz no vácuo.

Outro efeito importante é o da dilatação do tempo (RUSSEL, 2005), que pode ser entendida como a alteração na medida de intervalos de tempo entre dois eventos quando esses são medidos em dois referenciais em movimento retilíneo uniforme entre si. Tomemos como exemplo o período de um pêndulo: se quando medido em um referencial em repouso em relação ao próprio pêndulo o período for T_0 , quando este mesmo período for medido em um referencial com velocidade v , teremos como resultado:

$$T = T_0 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

no qual T é o período medido pelo observador em movimento em relação ao pêndulo.

III. Contração de Lorentz

Construção e utilização do diagrama

Para simular a contração de Lorentz, propomos um instrumento que pode ser construído com materiais fáceis de encontrar, como cartolina, régua, esquadro e compasso. O instrumento é construído com a ajuda do diagrama proposto por M. Bucher (BUCHER, 1988) para exemplificar a contração. Antes de descrever a montagem, é interessante entendermos como se chega ao diagrama.

Traçamos um quadrante de círculo centrado no encontro de dois eixos perpendiculares entre si (Fig. 1). Os eixos são graduados com escalas que vão de 0 a L_0 no eixo das abscissas e de 0.0 a 1.0 c no eixo das ordenadas. O desenho é feito de maneira que o ponto L_0 coincide com o encontro entre o arco de circunferência e o eixo das abscissas e o ponto no eixo vertical onde temos 1,0 c coincide com o encontro entre o arco e as ordenadas.

Pelo teorema de Pitágoras, vemos que na Fig. 1 é válida a relação:

$$L = L_0 \left[1 - \left(\frac{v}{L_0} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3)$$

É importante ressaltar que a expressão acima, apesar de parecer inconsistente dimensionalmente, foi escrita tomando como v e L_0 os valores medidos diretamente no desenho do diagrama. Utilizamos a mesma escala geométrica para o eixo das abscissas e para o eixo das ordenadas, portanto, a expressão 3 expressa o teorema de Pitágoras, não uma relação entre comprimento e velocidade.

Da maneira como construímos o diagrama, L_0 é geometricamente do mesmo tamanho que c , então podemos identificar $L_0 \equiv c$ e substituir do lado direito da equação (3) para encontrar:

$$L = L_0 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Identificando v com a velocidade do corpo em movimento e c com a velocidade da luz no vácuo, temos uma maneira direta de medir a contração de Lorentz.

Partindo de um certo valor de v no eixo vertical, colocamos um esquadro na posição horizontal sobre o diagrama. A medida do seguimento L que liga o ponto do eixo vertical considerado com a curva que delimita o quadrante nos

dá diretamente o comprimento que o corpo teria a uma velocidade v para um observador em repouso. Para um valor de velocidade $v = 0,6 c$ (como mostrado na Fig. 1), teremos:

$$\frac{L}{L_0} = \left[1 - \left(\frac{0,6c}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0,8 \quad (5)$$

ou seja, se o corpo estiver com velocidade de 60% da velocidade da luz, seu comprimento será reduzido a 80% do comprimento próprio L_0 .

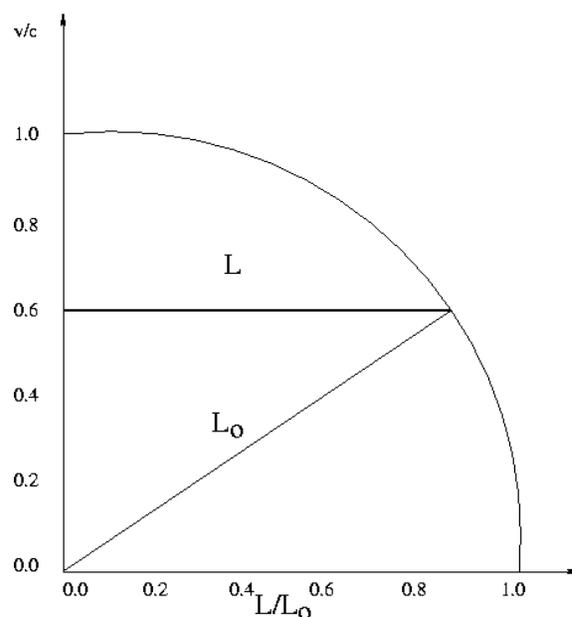


Fig. 1 - Diagrama para demonstração da contração de Lorentz.

Se tivermos uma régua com escala que vai de 0,0 a 1,0, quando medirmos o comprimento do segmento L no diagrama, encontraremos o fator multiplicativo para o novo comprimento sem a necessidade de contas, fornecendo ao aluno uma visualização concreta do fenômeno.

IV. Dilatação do tempo

IV.1 Diagrama

Para medidas de intervalos de tempo, a TRR prevê um efeito que chamamos de Dilatação do Tempo. Esse efeito diz respeito às comparações entre medidas de intervalo de tempo feitas por um observador em duas situações distintas: em repouso e em movimento retilíneo uniforme em relação ao sistema observado.

Essa dilatação é expressa pela equação (2). Os intervalos T_0 e T podem ser, por exemplo, as medidas do período de um pêndulo tomadas por um observador em repouso e a uma velocidade v em relação a ele, respectivamente.

Para esse caso, encontra-se na literatura (BUCHER, 1988) o diagrama da Fig. 2, no qual o valor do período de oscilação do pêndulo em movimento com velocidade v é dado, diretamente, pelo tamanho do segmento OE indicado na figura. Nesta figura, o ponto P representa o ponto de encontro entre o segmento OE e o arco de circunferência. Neste diagrama, fica clara a validade da equação:

$$x = c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

na qual, por semelhança de triângulos, percebemos também que é válida a relação:

$$\frac{c}{x} = \frac{T}{T_0}. \quad (7)$$

Para o valor de $v = 0,6 c$, já citado anteriormente, temos, pela equação (2),

$$\frac{T}{T_0} = 1,25, \quad (8)$$

ou seja, para uma velocidade de 60% da velocidade da luz, teremos um aumento de 25% no período de oscilação do pêndulo.

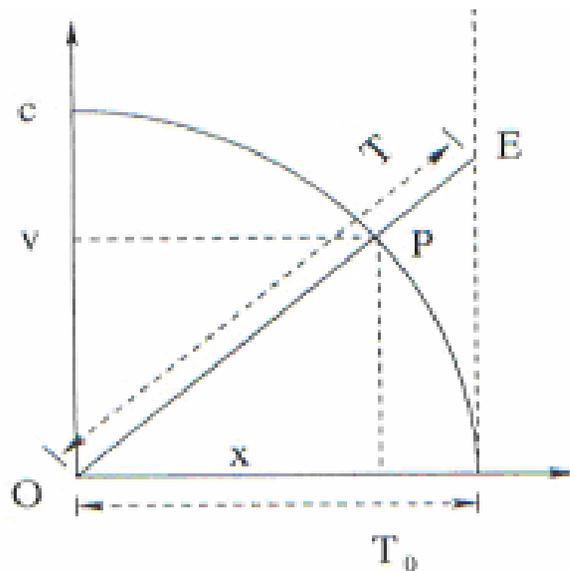


Fig. 2 - Diagrama proposto por M. Bucher para ilustrar a dilatação temporal.

IV.2 Diagrama dos pêndulos equivalentes

Mais um diagrama pode ser utilizado para demonstrar o efeito de dilatação do tempo na TRR. O diagrama mostrado a seguir nos possibilitará a comparação entre o ritmo de oscilação de um pêndulo em repouso e o de um pêndulo em movimento. A idéia é que sejam construídos dois pêndulos simples, o primeiro deles chamado de *Pêndulo de Referência*, representando o pêndulo em repouso, com comprimento L_0 , e outro de comprimento L , que terá período de

oscilação igual ao que o pêndulo de referência teria se estivesse se movendo a uma velocidade v , este segundo chamado de *Pêndulo Equivalente*. O diagrama que será mostrado serve para determinar, para uma dada velocidade, qual o comprimento L a ser utilizado no pêndulo equivalente.

Para construir o diagrama, lembremos que o período de oscilação de um pêndulo simples, para oscilações de pequena amplitude, é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (9)$$

sendo L o comprimento do pêndulo e g a aceleração da gravidade (NUSSENZVEIG, 1990). Assim, utilizando a relação de dilatação temporal entre os períodos do pêndulo em repouso e do pêndulo em movimento, dada pela equação (2), e a relação (9) para prever qual seria o comprimento do pêndulo equivalente, obtemos:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}} = \left[\frac{L}{L_0}\right]^{1/2}, \quad (10)$$

no qual v é a velocidade do pêndulo em movimento e L e L_0 são os comprimentos dos pêndulos equivalentes e de referência, respectivamente. Da equação (10) vem que:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (11)$$

O diagrama da Fig. 3 mostra como deve ser medido o comprimento do pêndulo equivalente para uma determinada velocidade. A medida direta do segmento L mostrado na figura fornece o fator multiplicativo para o comprimento do pêndulo equivalente. No exemplo apresentado na Fig. 3, se $L_0 = 1m$ e $v = 0,8c$, temos $L = 2,78m$, ou seja, se a velocidade for 80% da velocidade da luz, o pêndulo equivalente terá um comprimento 178% maior. Desta maneira, utilizando a relação entre comprimentos dada pela equação (11), podemos construir os dois pêndulos para comparação visual de seus ritmos durante o experimento.

Este recurso pode ser bastante valioso quando se pretende explicar certos fenômenos como o “paradoxo dos gêmeos” (TIPLER, 2000), no qual um dos irmãos gêmeos faz uma viagem em alta velocidade pelo espaço. Alguns anos depois, quando retorna, percebe-se que ele está mais jovem que seu irmão que permaneceu na Terra. Isto ocorre devido ao fato de que, para as medidas feitas a

partir de nosso planeta, o tempo dentro da nave avançou mais lentamente que o tempo local. Este efeito, que é citado freqüentemente em textos de divulgação científica, pode ser analisado pelos alunos utilizando o diagrama da Fig. 3 para construir o pêndulo equivalente para uma determinada velocidade e comparando o ritmo de oscilação deste com o do pêndulo de referência. Este procedimento é útil, embora não nos permita explicar certos efeitos, como a quebra de simetria que leva o viajante a envelhecer mais lentamente que o irmão que permanece na Terra.

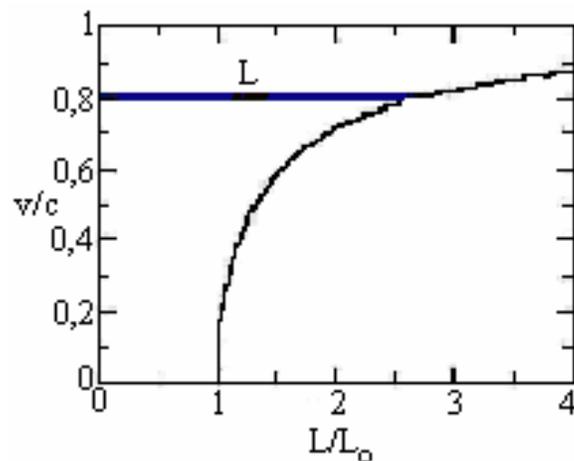


Fig. 3 - Diagrama para determinação do comprimento do pêndulo equivalente.

V. Conclusões

As construções dos instrumentos que mostramos neste trabalho podem ser muito úteis para o professor de ensino médio e até mesmo para o professor de Física Básica em cursos de Engenharia, que às vezes se depara com a dificuldade de introduzir os alunos às abstrações da Física Moderna.

É interessante acrescentar, ainda, que há outros diagramas possíveis (SCHWARTZ, 1962; MILLER, 1981; BREHME, 1962) que podem ser encontrados na literatura e ser facilmente adaptados ao propósito de fornecer noções da Teoria da Relatividade Restrita a alunos iniciantes no campo da Física.

Referências

BREHME, R. W. A geometric representation of Galilean and Lorentz transformations. **Am. J. Phys.**, v. 30, n. 7, Jul. 1962.

BUCHER, M. Diagrams for relativistic length contraction and time dilation. **Am. J. Phys.**, v. 56, n. 10, Oct. 1988.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS M. **The Feynman Lectures on Physics**. Massachussets: Addison Wesley Reading, 1963.

JAMES, K. et al Analog device for Lorentz calculations. **The Physics Teacher**, v. 30 n. 8, Nov. 1992.

MILLER, A. L. **Albert Einstein's Special Theory of Relativity**. Boston: Addison-Wesley, 1981.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. São Paulo: Edgard Blucher, 1990. v. 2.

RUSSEL, B. **ABC da Relatividade**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2005.

SCHWARTZ, J. T. **Relativity in Illustrations**. New York: New York University Press, 1962.

TIPLER, P. A. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2000. v. 3.